Pratique Supplémentaire 6

Remarques : il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

Exercice 1

Soit $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille 2×2.

a) Montrer que les matrices A, B et C données par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendantes.

b) Trouver a, b, c, d tels que pour $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, les matrices A, B, C, D forment une base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Exercice 2

En calculant la forme échelonnée d'une matrice, montrer que le vecteur $\overrightarrow{v}$ est dans le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$:

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Exercice 3

Trouver une base de l'espace engendré par les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

Soit la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & -12 \\ 8 & 4 & 4 & -5 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Trouver une base de Ker$C$.
2. On note par T la transformation linéaire de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par $T(\overrightarrow{x}) = C\overrightarrow{x}$. L'application T est-elle injective ? T est-elle surjective ? Justifier votre réponse.

Exercice 5

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
a) Soient V un espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de V. Alors on a aussi que V est un sous-espace vectoriel de lui-même (ou d'un espace vectoriel plus grand) et H est un espace vectoriel.	☐	☐
b) Si H est un sous-ensemble d'un espace vectoriel V, alors il suffit que 0_V soit dans H pour que H soit un sous-espace vectoriel de V.	☐	☐
c) Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\mathrm{Ker}(A) = \{\overrightarrow{0}\}$.	☐	☐
d) Le noyau d'une matrice A n'est pas nécessairement un espace vectoriel.	☐	☐

Exercice 6

Vous pouvez ignorer la partie (b), qui est longue à résoudre sans connaître les propriétés spéciales des matrices de Vandermonde.

a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ a & 6 \end{pmatrix}$. Calculer le noyau et l'image de A en fonction des valeurs du paramètre réel a. Déterminer quand la matrice A est inversible.

b) Calculer le noyau et le rang de la matrice de Vandermonde $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ en fonction des valeurs du paramètre réel a.

Exercice 7

La notation ci-dessous est un peu différente de la notation qu'on utilise en classe.

Soient $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ et $\mathcal{C} = \{c_1, c_2\}$ deux bases d'un espace vectoriel V. Supposons que $b_1 = 6c_1 - 2c_2$ et $b_2 = 9c_1 - 4c_2$.

(a) Calculer la matrice de changement de base $P = (\mathrm{Id}_V)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$.

(b) Trouver $(x)_{\mathcal{C}}$ pour $x = -3b_1 + 2b_2$ en utilisant le résultat en (a)

Soient $\mathcal{A} = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\}$ et $\mathcal{D} = \{\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_2}\}$ deux bases de $\mathbb{R}^2$.

$$\overrightarrow{a_1} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{a_2} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{d_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{d_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(c) Calculer la matrice de changement de base $P = (\mathrm{Id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{D}}$ de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{D}$.

(d) Calculer la matrice de changement de base $Q = (\mathrm{Id})_{\mathcal{D}}^{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{D}$ vers $\mathcal{A}$.

Exercice 8

Dans $\mathbb{P}_2$, calculer la matrice de changement de base de la base

$$\mathcal{B} = (1 - 2t + t^2, 3 - 5t + 4t^2, 2t + 3t^2)$$

vers la base canonique $\mathcal{C} = (1, t, t^2)$. Puis écrire les coordonnées du vecteur $p = -1 + 2t$ dans la base $\mathcal{B}$.
